View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Kyoto University Research Information Repository
KURENAI
Kyoto University Research Information Repository
KYOTO UNIVERSITY

Title	2変数 P-進 L-関数の値について(保型形式とその周辺)
Author(s)	小塚, 和人
Citation	数理解析研究所講究録 (1987), 617: 77-88
Issue Date	1987-03
URL	http://hdl.handle.net/2433/99848
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

数理解析研究所講究録
617巻 1987年 77-88

2変数 p-進 L-関数の値について

九大理 小塚和人 (Kazuhito Kozuka)

§1. 序

K を複素数体 $\mathbb{C}$ に含まれる類数1の虚2次体, $-d_K$ を, K の判別式とする. E を K 上定義され, K の整数環 $\mathcal{O}$ による虚数乗法を持つ楕円曲線, ψ を E の K 上の量指標, $\mathfrak{f}$ を ψ の導手とする. E の Weierstrass model

$$(1.1)\qquad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

を, $g_2, g_3 \in \mathcal{O}$ かつ判別式 $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ が $6\mathfrak{f}$ の素因子のみで割り切れるように固定する. $\wp(z)$ を (1.1) に関する Weierstrass の $\wp$-関数, L を $\wp(z)$ の周期格子とし, $\Omega_\infty \in L$ を $L = \Omega_\infty \mathcal{O}$ となるようにとる.

p を $6d_K\mathfrak{f}$ と素で, K で $(p) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}^*$ と完全分解する有理素数とし, $\pi = \psi(\mathfrak{p})$, $\pi^* = \psi(\mathfrak{p}^*)$ とおく. 各 $\mathfrak{g} \in \mathcal{O}$ に対し, E の $\mathfrak{g}$-分点全体のなす群を $E_{\mathfrak{g}}$ と書くことにする. $E_{\pi^\infty} = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_{\pi^{n+1}}$, $E_{\pi^{*\infty}} = \bigcup_{m=0}^{\infty} E_{\pi^{*m+1}}$ とおく.

以後 K の $\mathfrak{p}$ による完備化を，p-進有理数体 $\mathbb{Q}_p$ と同一視し，$\mathbb{Z}_p$ を $\mathbb{Q}_p$ の整数環とする．

$\mathfrak{P}_\infty$ を $\mathfrak{p}$ の上にある $K(E_{\pi^{*\infty}})$ の素イデアル，$\mathcal{F}_\infty$ を $K(E_{\pi^{*\infty}})$ の $\mathfrak{P}_\infty$ による完備化，$\mathbb{C}_p$ を $\mathcal{F}_\infty$ の代数閉包の完備化とし，K の $\mathbb{C}$ における代数閉包を $\mathbb{C}_p$ に埋め込んでおく．$\mathcal{F}_\infty$, $\mathbb{C}_p$ の整数環をそれぞれ $\mathcal{O}_\infty$, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ と書くことにする．

K の整イデアル $\mathfrak{g}$ に対し，$Cl(\mathfrak{g})$ を K の ray class group mod $\mathfrak{g}$，$R(\mathfrak{g})$ を K の ray class field mod $\mathfrak{g}$ とする．整数 $k \geq 1$ に対し，ψ^k の導手が $\mathfrak{g}$ を割り切るとき，$\sigma \in Gal(R(\mathfrak{g})/K)$ に対して，$L_\mathfrak{g}(\sigma, \overline{\psi}^k, s)$ を部分 zeta 関数，即ち，

$$L_\mathfrak{g}(\sigma, \overline{\psi}^k, s) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}:K\text{の整イデアル} \\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{g})=1,\ (\mathfrak{a}, R(\mathfrak{g})/K)=\sigma}} \overline{\psi}^k(\mathfrak{a}) N\mathfrak{a}^{-s} \quad (Re(s) > 1 + k/2)$$

の全 s-平面への解析接続とする．$Cl(\mathfrak{g})$ の指標 χ に対し，

$$L_\mathfrak{g}(\chi\overline{\psi}^k, s) = \sum_{C \in Cl(\mathfrak{g})} \chi(C) L_\mathfrak{g}(\sigma_C, \overline{\psi}^k, s)$$

とおく．ここに σ_C は，Artin 対応によって $C \in Cl(\mathfrak{g})$ に対応する $Gal(R(\mathfrak{g})/K)$ の元である．特に，$\mathfrak{g}$ が $\overline{\chi}\psi^k$ の導手に等しいとき，$L_\mathfrak{g}(\chi\overline{\psi}^k, s)$ は，$\chi\overline{\psi}^k$ に関する primitive Hecke L-関数になる．これを単に，$L(\chi\overline{\psi}^k, s)$ と書くことにする．

u を $1+p\mathbb{Z}_p$ の位相的生成元とする．このとき，各 $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し，次の補間的性質を持つ巾級数 $G_f^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2) \in \mathcal{O}_\infty[[T_1, T_2]]$ が存在する（[5]）；

$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $0 \leq -k_2 < k_1$, $(k_1, k_2) \equiv (i_1, i_2) \pmod{p-1}$ のとき,

$$(1.2) \quad \mathcal{G}_f^{(i_1, i_2)}(u^{k_1}-1, u^{k_2}-1) = (k_1-1)!\,\Omega_g^{k_2-k_1}\left(1-\psi(g)^{k_1-k_2}/Ng^{1-k_2}\right)$$
$$\times\left(1-\overline{\psi}(g^*)^{k_1-k_2}/Ng^{*k_1}\right)\left(2\pi/\sqrt{d_K}\right)^{-k_2}\Omega_\infty^{-(k_1-k_2)}L_f(\overline{\psi}^{k_1-k_2}, k_1)$$

ここに, Ω_g は §2で定義する $\mathcal{O}_0^{\times}$ の元, また(1.2)の右辺は, Damerellの定理により, $\mathbb{C}_p$ の元とみなしている.

ここでは, $\mathbb{Z}_p^{\times}$ の第2種指標 φ, φ' 及び整数 $k_1 > -k_2 \geq 0$ に対する $\mathcal{G}_f^{(i_1, i_2)}(\varphi(u)u^{k_1}-1, \varphi'(u)u^{k_2}-1)$ の値を調べ, 〔1〕系2.4の2変数の場合における類似の結果と, Dirichlet 指標に対する p-進L-関数の $s=1$ での値に関するLeopoldtの公式の類似の結果を紹介する.

§2. Eisenstein 級数

整数 $k \geq 1$ に対し, $K_k(z, s)$ を

$$K_k(z, s) = \sum_{w \in L, w \neq -z} (\bar{z}+\bar{w})^k |z+w|^{-2s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1 + k/2)$$

の全 s-平面への解析接続とする. 整数 $k > j \geq 0$ に対し,

$$E_{j,k}(z) = (k-1)!\left(2\pi/\sqrt{d_K}\right)^{j}|\Omega_\infty|^{-2j}K_{k+j}(z, k)$$

とおく. さらに, $E_k(z) = E_{0,k}(z)$ とおく.

$\sigma(z)$ を格子Lに関するWeierstrass σ-関数とし,

$$\theta(z) = \Delta \exp(-6 s_2 z^2)\,\sigma(z)^{12}$$

とおく. ここに, $s_2 = \lim_{s \to 0+} \sum_{w \in L - \{0\}} w^{-2}|w|^{-2s}$ である.

I を $6pf$ と素なKの整イデアル全体の集合とする. 各 $\mathfrak{a} \in$ I

に対し,

$$\Theta(z, \mathfrak{a}) = \theta(z)^{N\mathfrak{a}} / \theta(\psi(\mathfrak{a})z)$$

とおく. $\Theta(z, \mathfrak{a})$, $E_k(z)$ に関して, 次の結果が成り立つ.

(2.1) $\qquad \Theta(z, \mathfrak{a}) \in K(\wp(z))$

$k \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus L$ に対し,

(2.2) $\left(d/dz\right)^k \log \Theta(z+\alpha, \mathfrak{a})\Big|_{z=0} = 12(-1)^{k-1}\{N\mathfrak{a}E_k(\alpha) - \psi(\mathfrak{a})^k E_k(\psi(\mathfrak{a})\alpha)\}.$

$k > j \geq 0$, $\mathfrak{g} \in \mathcal{O}$ のとき, $\alpha \in \mathfrak{g}^{-1}L \setminus L$ に対し,

(2.3) $\qquad E_{j,k}(\alpha) \in K(E_{\mathfrak{g}})$.

$\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{f}$ 及びアーベル拡大 $K(E_{\mathfrak{g}})/K$ の導手と素な K の整イデアルのとき,

(2.4) $\qquad E_{j,k}(\Omega_\infty/g)^{(\mathfrak{b}, K(E_{\mathfrak{g}})/K)} = E_{j,k}(\psi(\mathfrak{b})\Omega_\infty/g)$.

$\mathfrak{g} = (g)$ が $\mathfrak{f}^*$ 及び ψ^{k+j} の導手で割り切れるとき,

(2.5) $E_{j,k}(\psi(\mathfrak{b})\Omega_\infty/g) = g^{k+j}/Ng^j \; (k-1)!\left(2\pi/\sqrt{d_K}\right)^j \Omega_\infty^{-(k+j)} L_{\mathfrak{g}}(\sigma_{\mathfrak{b}}, \overline{\psi}^{k+j}, k)$,

ここに, $\sigma_{\mathfrak{b}} = (\mathfrak{b}, R(\mathfrak{g})/K)$ である.

$\hat{E}$ を E の演算を parameter $t = -2x/y$ で展開して得られる形式群とし, $\lambda : \hat{E} \xrightarrow{\sim} G_a$ を E の logarithm とする. $\hat{E}$ から乗法的形式群 G_m への $\mathcal{O}_\infty$ 上の同型 η が存在する ([5]). $i : G_m \xrightarrow{\sim} \hat{E}$ を η の inverse とする.

命題 2.1. $\mathfrak{g} \in \mathcal{O}$, $(\mathfrak{g}, \pi^*) = 1$ とすると, 整数 $m \geq 0$ に対し, $\pi^{m+1} E_1(\Omega_\infty/g\pi^{*m+1})$ は $\mathfrak{g}$-integral になる.

（証明）　$\alpha = \Omega_\infty / g\pi^{*m+1}$ とおく．$\Theta(\lambda(t)+\alpha, \mathfrak{a})$ の t による巾級数展開は，各係数が $K(E_\alpha)$ の $\mathfrak{g}$-integral な元で，整級数になり，定数項は $\mathfrak{g}$-unit になる。従って，

$$d/dz \log \Theta(z+\alpha, \mathfrak{a})\Big|_{z=0} = \lambda'(t)^{-1}\, d/dt \log \Theta(\lambda(t)+\alpha, \mathfrak{a})\Big|_{t=0}$$

も $\mathfrak{g}$-integral になり，(2.2) により $\pi^{m+1}E_1(\alpha)$ も $\mathfrak{g}$-integral になる．

命題2.2.　$g \in \mathcal{O}$, $(g, \pi^*) = 1$ とする．このとき，整数 $k > j \geq 0$ に対し，整数 $\delta(g,k,j) \geq 0$ が存在し，$\forall m \geq 0$ に対し，

$$(2.6)\quad \overline{(g\pi^{*m+1})^j}\, E_{j,k}(\Omega_\infty / g\pi^{*m+1}) \equiv \left(\overline{-g\pi^{*m+1}}\, E_1(\Omega_\infty / g\pi^{*m+1})\right)^j E_k(\Omega_\infty / g\pi^{*m+1})$$
$$\mod \mathfrak{g}^{m+1-\delta(g,k,j)}\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$$

となる．

（証明）　$\eta(T) = \Omega_{\mathfrak{g}} T + \cdots$ とする．$\mathfrak{a} \in I$ に対し

$$h_{\mathfrak{a}}(T) = \lambda'(W)^{-1}\, d/dW \log \Theta(\lambda(W) + \Omega_\infty / g\pi^{*m+1}, \mathfrak{a})\Big|_{W=i(T)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T]]$$

とおく．$h_{\mathfrak{a}}(T)$ に対応する $\mathbb{Z}_p$ 上の $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$-値 measure $\mu_{h_{\mathfrak{a}}}$ に対し，

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^{k-1}\, d\mu_{h_{\mathfrak{a}}} = \left((1+T)\, d/dT\right)^{k-1} h_{\mathfrak{a}}(T)\Big|_{T=0}$$
$$= \Omega_{\mathfrak{g}}^{1-k} \cdot 12(-1)^{k-1} \Big\{ N\mathfrak{a}\, E_k(\Omega_\infty / g\pi^{*m+1})$$
$$- \psi(\mathfrak{a})^k E_k(\psi(\mathfrak{a})\Omega_\infty / g\pi^{*m+1}) \Big\}$$

が成り立つ．f を $\mathfrak{f}$ の生成元とし，$\mathfrak{a} = (1 + 6fg\pi\pi^{*m+1})$ とおくことにより，$m \gg 0$ のとき，$p^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{g}}(g\pi(k-1))} E_k(\Omega_\infty / g\pi^{*m+1})$ は $\mathfrak{g}$-integral になることがわかる．

$k > j \geq 0$, $k > 1$ のとき，$P_{j,k}(X_1, \cdots, X_{k+j}) \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_{k+j}]$ で，

$\deg P_{jk} \leq j+1$, $\deg_{X_1} P_{jk}(X_1, \cdots, X_{k+j}) \leq j-1$, $E_{jk}(z) = (-E_1(z))^j E_k(z) + 2^{-j} P_{jk}(E_1(z), \cdots, E_{k+j}(z))$ となるものが存在するから([4]), (2.6) を満たす $\delta(g, k, j)$ が存在する.

命題2.3. $g \in \mathcal{O}$, $(g, \pi^*) = 1$ とする. このとき, 極限値

$$\lim_{m\to\infty} \overline{g\pi^{*m+1}}\, E_1(\Omega_\infty / g\pi^{*m+1})$$

が $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ において存在する. さらにこれは, g には無関係で, $\mathcal{O}_\infty$ に属する.

命題2.3 は, [6] 定理4.3 の証明と同様の方針で証明される. [5] 定理15 の証明も考慮すると, $\eta : \hat{E} \simeq \hat{G}_m$ は, $\Omega_g = \eta'(0) = \lim_{m\to\infty} -\overline{g\pi^{*m+1}}\, E_1(\Omega_\infty / g\pi^{*m+1})$ を満たすようにとれることがわかる. 以下, η はこの条件も満たすものとする.

§3. 2変数 p-進 L-関数への応用

整数 $m \geq 0$ に対し, $B_m \subset I$ を $\{(\mathfrak{b}, R(\mathfrak{f}\mathfrak{g}^{*m+1})/K),\ \mathfrak{b} \in B_m\}$ がちょうど $Gal(R(\mathfrak{f}\mathfrak{g}^{*m+1})/K(E_{\pi^{*m+1}}))$ と一致するようにとる.

$\mathfrak{a} \in I$ に対し,

$$\Lambda_m(z, \mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{b} \in B_m} \Theta(z + \psi(\mathfrak{b})\Omega_\infty / f\pi^{*m+1}, \mathfrak{a})$$

とおく. これは $K(E_{\pi^{*m+1}})$-係数の $\wp(z)$ と $\wp'(z)$ の有理関数になり, B_m のとり方にはよらない. $\Lambda_m(z, \mathfrak{a})$ を z の巾級数に展開し,

z を $\pi^{*-(m+1)}\lambda(T)$ で置き換えることにより，$K(E_{\pi^{*m+1}})$-係数の T を不定元とする整級数が得られる。これを $C_{m,\mathfrak{a}}(T)$ と書く。$C_{m,\mathfrak{a}}(T)$ の各係数は $\mathfrak{g}$-integral，$C_{m,\mathfrak{a}}(0)$ は $\mathfrak{g}$-unit になるから，$C_{m,\mathfrak{a}}(T)$ は $(\mathcal{O}_\infty[[T]])^\times$ に属するとみることができる．

$$g_{m,\mathfrak{a}}(T)=\lambda'(T)^{-1}\,d/dT\,\log C_{m,\mathfrak{a}}(T)\in\mathcal{O}_\infty[[T]]$$

とおく。

$a, m, \ell\in\mathbb{Z}$，$(a,p)=1$，$m,\ell\geq 0$，$\sigma\in Gal(R(\mathfrak{f}\mathfrak{g}^{*m+1})/K)$，$\mathfrak{b}\in I$ のとき，$A(a,m,\ell,\sigma,\mathfrak{b})\in\mathcal{O}$ を，$A(a,m,\ell,\sigma,\mathfrak{b})\equiv af \mod \mathfrak{g}^\ell$，$A(a,m,\ell,\sigma,\mathfrak{b})\equiv\psi(\mathfrak{b}\mathfrak{a}_\sigma)\pi^\ell \mod \mathfrak{f}\mathfrak{g}^{*m+1}$ を満たすようにとる。ここに $\mathfrak{a}_\sigma$ は，$(\mathfrak{a}_\sigma, R(\mathfrak{f}\mathfrak{g}^{*m+1})/K)=\sigma$ を満たす K の整イデアルである．

$g_{m,\mathfrak{a}}(T)$ の各係数は，$K(E_{\pi^{*m+1}})$ に属するから，F を $K(E_{\pi^{*m+1}})$ を含む K のガロア拡大とするとき，$\tau\in Gal(F/K)$ に対し，$g_{m,\mathfrak{a}}^{\tau}(T)$ が自然に定義され，$g_{m,\mathfrak{a}}^{\tau}(T)\in\mathcal{O}_\infty[[T]]$ となる．

以下，整数 $n\geq 0$ に対し，1 の原始 p^{n+1}-乗根 $\zeta_{p^{n+1}}$ は，

$$i(\zeta_{p^{n+1}}-1) = -2\wp(\Omega_\infty/\pi^{n+1})/\wp'(\Omega_\infty/\pi^{n+1})$$

を満たすものとする．(2.2)，(2.4)，(2.5)，命題 2.2，2.3 から次の命題が導かれる。

命題 3.1. $a, m, \ell\in\mathbb{Z}$，$(a,p)=1$，$m,\ell\geq 0$，$\sigma\in Gal(R(\mathfrak{f}\mathfrak{g}^{*m+1})/K)$ とする．このとき，$\mathfrak{a}\in I$ 及び整数 $k_1>-k_2\geq 0$ に対し，

$$\left((1+T)\,d/dT\right)^{k_1-1} g_{m,\mathfrak{a}}^{\sigma}\left(i(\zeta_{p^\ell}^{a}(1+T)-1)\right)\Big|_{T=0}$$

$$\equiv 12(-\Omega_{\mathfrak{p}})^{1-k_1+k_2}\, \mathfrak{f}^{k_1}\, (\psi^{k_1}\overline{\psi}^{k_2})(\mathfrak{p}^{\ell})\, \overline{\psi}^{k_2}(\alpha_\sigma)\, (k-1)! \sum_{\mathfrak{b}\in B_m} (2\pi/\sqrt{d_K})^{-k_2}\, \Omega_\infty^{-(k_1-k_2)}$$
$$\times \Big\{ N\alpha\, L_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{\ell}\mathfrak{p}^{*m+1}}(\sigma_{A(a,m,\ell,\sigma,\mathfrak{b})}, \overline{\psi}^{k_1-k_2}, k_1)$$
$$- \psi^{k_1}(\alpha)\overline{\psi}^{k_2}(\alpha)\, L_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{\ell}\mathfrak{p}^{*m+1}}(\sigma_{A(a,m,\ell,\sigma,\mathfrak{b})\alpha}, \overline{\psi}^{k_1-k_2}, k_1)\Big\} \bmod \mathfrak{p}^{m+1-\delta(\mathfrak{f}\pi^{\ell}, k_1, -k_2)}$$

となる.

$\kappa : Gal(K(E_{\pi^\infty})/K) \simeq \mathbb{Z}_p^\times$ を, $Gal(K(E_{\pi^\infty})/K)$ の E_{π^∞} への作用を表す指標, $\kappa^* : Gal(K(E_{\pi^{*\infty}})/K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$ を, $Gal(K(E_{\pi^{*\infty}})/K)$ の $E_{\pi^{*\infty}}$ への作用を表す指標とする. 各 $\sigma \in Gal(K(E_{\pi^{*m+1}})/K)$ に対し, $\kappa^*(\sigma)$ が $\bmod\ \mathfrak{p}^{m+1}$ で定まり, 従って, $(1+T)^{\kappa^*(\sigma)}$ が $\bmod\ ((1+T)^{p^{m+1}}-1)\mathcal{O}_\infty[[T]]$ で定まる. $\mu : I \to \mathbb{Z}$ を, $\mu(\alpha)=0$ *for almost all* $\alpha \in I$, $\sum_{\alpha\in I} \mu(\alpha)(N\alpha-1)=0$ を満たす写像とする. μ に対し,

$$g_{m,\mu}(T) = \sum_{\alpha\in I} \mu(\alpha)\, g_{m,\alpha}(T)$$

とおく. このとき,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{\sigma\in Gal(K(E_{\pi^{*m+1}})/K)} g^{\sigma}_{m,\mu}(T_1)(1+T_2)^{\kappa^*(\sigma)} \in \mathcal{O}_\infty[[T_1, T_2]]$$

が存在する ([5] 定理 5, 10). この巾級数を $g_\mu(T_1, T_2)$ と書くことにする. さらに,

$$h_\mu(T_1, T_2) = g_\mu(i(T_1), T_2)$$
$$(U_1 h_\mu)(T_1, T_2) = h_\mu(T_1, T_2) - 1/p \sum_{\zeta^p=1} h_\mu(\zeta(1+T_1)-1, T_2)$$

とおく. $U_1 h_\mu$ は, $\mathbb{Z}_p^2$ 上の $\mathcal{O}_\infty$-値 *measure* $\mu_{U_1 h_\mu}$ を定義する. ω を Teichmüller character とし, $x \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対し, $\langle x\rangle = x/\omega(x)$ とおく. このとき, 各 $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し, Γ-変換 $\Gamma^{(i_1,i_2)}_{U_1 h_\mu} : \mathbb{Z}_p^2 \to \mathcal{O}_\infty$

が，

$$\Gamma_{U_1 h_\mu}^{(i_1,i_2)}(s_1,s_2)=\int_{\mathbb{Z}_p^\times\times\mathbb{Z}_p^\times}\langle x_1\rangle^{s_1}\langle x_2\rangle^{s_2}\omega^{i_1}(x_1)\omega^{i_2}(x_2)\,d\mu_{U_1 h_\mu}$$

によって定義される．さらに，$(U_1 h_\mu)^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)\in\mathcal{O}_\infty[[T_1,T_2]]$ が存在して，

$$\Gamma_{U_1 h_\mu}^{(i_1,i_2)}(s_1,s_2)=(U_1 h_\mu)^{(i_1,i_2)}(u^{s_1}-1,\ u^{s_2}-1)$$

となる．

$$G_\mu^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)=(U_1 h_\mu)^{(i_1-1,-i_2)}(u^{-1}(1+T_1)-1,\ (1+T_2)^{-1}-1)$$

とおく．

(1.2) を満たす補間級数 $G_f^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)$ は，$G_\mu(T_1,T_2)$ から容易に構成される([5])。

χ を $\mathbb{Z}_p^\times$ の有限位数の指標とすると，$\chi\circ\kappa$ は $Gal(K(E_{\pi^\infty})/K)$ の有限位数の指標となるから，類体論により，$\chi\circ\kappa$ の Kernel の固定体の K 上の導手で割り切れる K の整イデアル $\mathfrak{g}$ に対し，$\chi\circ\kappa$ は，mod $\mathfrak{g}$ の類指標を定義する．これを $\chi_\mathfrak{g}$ と書くことにする．同様に，$\mathfrak{g}$ が $\chi\circ\kappa^*$ の Kernel の固定体の K 上の導手で割り切れるとき，$\chi\circ\kappa^*$ から mod $\mathfrak{g}$ の類指標が定義される．これを $\chi_{\mathfrak{g}^*}$ と書くことにする．

命題3.1 と，Γ-変換の性質 ([2], [5]) から，次の結果が得られる．

定理 3.2.　$(i_1,i_2)\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$，$k_1,k_2\in\mathbb{Z}$，$k_1>-k_2\geq 0$ とする．

ψ, ψ' を $\mathbb{Z}_p$ の第2種指標，$\chi = \psi\omega^{i_1-k_1}$，$\chi' = \psi'\omega^{i_2-k_2}$ とおく．p^{n_1}，p^{n_2} をそれぞれ χ，χ' の導手とする．このとき，

(3.1) $$G_f^{(i_1,i_2)}(\psi(u)u^{k_1}-1, \psi'(u)u^{k_2}-1)$$
$$= (-1)^{i_1+i_2}(-\Omega_g)^{k_2-k_1}(\psi^{k_1}\overline{\psi}^{k_2}\chi'_{g^*})(g^{n_1})\,\tau(\chi^{-1}, J_{p^{n_1}})^{-1}(k_1-1)!$$
$$\times (2\pi/\sqrt{d_K})^{-k_2}\,\Omega_\infty^{-(k_1-k_2)}\left(1-(\psi^{k_1-k_2}\chi_g\chi'_{g^*})(g)/Ng^{-k_2+1}\right)\left(1-(\overline{\psi}^{k_1-k_2}\overline{\chi}_g\overline{\chi'_{g^*}})(g^*)/Ng^{k_1}\right)$$
$$\times L_{fg^{n_1}g^{*n_2}}(\overline{\chi}_g\overline{\chi'_{g^*}}\,\overline{\psi}^{k_1-k_2}, k_1)$$

となる．ここに，$\tau(\chi^{-1}, J_{p^{n_1}})$ は，χ^{-1} と $J_{p^{n_1}}$ に対するガウス和である．

$G^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2) \in \mathcal{O}_\infty[[T_1, T_2]]$ を，$k_1 > -k_2 \geq 0$，$(k_1, k_2) \equiv (i_1, i_2) \pmod{p-1}$ のとき，

$$G^{(i_1,i_2)}(u^{k_1}-1, u^{k_2}-1) = (k_1-1)!\,\Omega_g^{k_2-k_1}\left(1-\psi(g)^{k_1-k_2}/Ng^{1-k_2}\right)\left(1-\overline{\psi}(g^*)^{k_1-k_2}/Ng^{*k_1}\right)$$
$$\times (2\pi/\sqrt{d_K})^{-k_2}\,\Omega_\infty^{-(k_1-k_2)}\,L(\overline{\psi}^{k_1-k_2}, k_1)$$

となる巾級数とする．このとき，[2] (7.4) により，次の系が成立する．

系 3.3．定理 3.2 の仮定の上に，更に $(k_1, k_2) \equiv (0, 0) \pmod{p-1}$ とする．このとき，$G^{(i_1,i_2)}(\psi(u)u^{k_1}-1, \psi'(u)u^{k_2}-1)$ は，(3.1) の右辺で，$L_{fg^{n_1}g^{*n_2}}(\overline{\chi}_g\overline{\chi'_{g^*}}\,\overline{\psi}^{k_1-k_2}, k_1)$ を $L(\overline{\chi}_g\overline{\chi'_{g^*}}\,\overline{\psi}^{k_1-k_2}, k_1)$ におきかえて得られる値に一致する．

Kの整イデアル $\mathfrak{g} \neq (1)$ と、$C \in Cl(\mathfrak{g})$ に対し、$\varphi_{\mathfrak{g}}(C) \in R(\mathfrak{g})$ を、〔3〕で定義された ray class invariant とする．$Cl(\mathfrak{g})$ の原始指標 χ に対し、

$$S^{(\mathfrak{p})}(\chi) = \sum_{C \in Cl(\mathfrak{g})} \chi^{-1}(C) \log_p \varphi_{\mathfrak{g}}(C)$$

とおく．ここに、$\log_p$ は $\mathbb{C}_p^{\times}$ 上定義された p-進対数である．

$k_{\mathfrak{g}} > 0$ を、$\mathfrak{g} \cap \mathbb{Z}$ の生成元とする．このとき、〔2〕定理5.1 は次のように表される．

定理3.4. $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ とし、φ, φ' を $\mathbb{Z}_p$ の第2種指標、p^{n_1}, p^{n_2} をそれぞれ、$\varphi\omega^{i_1}, \varphi'\omega^{i_2}$ の導手とする．$n_1' = \max\{n_1, 1\}$ とおく．さらに、$(\varphi\omega^{i_1})_{\mathfrak{p}}(\varphi'\omega^{i_2})_{\mathfrak{p}^*} \neq 1$ と仮定する．このとき、

$$G^{(i_1,i_2)}(\varphi(u)-1, \varphi'(u)-1) = \frac{(-1)^{1+i_1-i_2}(\varphi'\omega^{i_2})_{\mathfrak{p}^*}(\mathfrak{p}^{n_1'})}{12\, k_{\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}\mathfrak{p}^{n_1}\mathfrak{p}^{*n_2}}\, \tau(\varphi^{-1}\omega^{-i_1}, J_{p^{n_1}})} \cdot \left(1 - \frac{((\varphi\omega^{i_1})_{\mathfrak{p}}(\varphi'\omega^{i_2})_{\mathfrak{p}^*})(\mathfrak{p})}{p}\right)$$

$$\times \left(1 - ((\varphi\omega^{i_1})_{\mathfrak{p}}(\varphi'\omega^{i_2})_{\mathfrak{p}^*})(\mathfrak{p}^*)\right) S^{(\mathfrak{p})}\left((\varphi\omega^{i_1})_{\mathfrak{p}}(\varphi'\omega^{i_2})_{\mathfrak{p}^*}\right)$$

となる．

参考文献

〔1〕 C. Goldstein, Courbes elliptiques et theorie d'Iwasawa, Pub. Math. D'orsay, 82-01

〔2〕 K. Kozuka, Elliptic units and two variable p-adic L-functions, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 40 (1986), 77-90.

[3] G. Robert, *Unités elliptiques*, Bull. Soc. Math. France Mémoire, 36 (1973).

[4] A. Weil, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1976.

[5] R. Yager, *On two variable p-adic L-functions*, Ann. of Math., 115 (1982), 411-449.

[6] R. Yager, *p-adic measures on Galois groups*. Invent. Math 76 (1984)., 331-343.